CÔNG THỨC ITÔ VÀ MỘT VÀI VÍ DỤ MINH HỌA CÁCH TÍNH

***Nguyễn Thành Tâm*[1]**

TÓM TẮT

Bài viết phân tích, nghiên cứu công thức Itô trường hợp một chiều và công thức Itô tổng quát, với các ví dụ chi tiết rõ ràng tương ứng với từng công thức. Các ví dụ cụ thể về công thức Itô sẽ có ích cho việc tiếp cận giải tích ngẫu nhiên, từ đó có thể đi sâu nghiên cứu hơn về vi tích phân ngẫu nhiên.

***Từ khóa:** Itô, vi phân, tích phân, quá trình ngẫu nhiên*

1. Mở đầu

Vi tích phân Itô là một trong những khái niệm quan trọng của giải tích ngẫu nhiên, đã có rất nhiều nghiên cứu từ lý thuyết đến ứng dụng về nó. Công thức Itô là nền tảng cơ bản để nghiên cứu sâu hơn về giải tích ngẫu nhiên, bài viết nhằm phân tích các ví dụ chi tiết công thức Itô theo hướng dễ tiếp cận với hy vọng tạo thêm nguồn tài liệu tham khảo cho những sinh viên quan tâm đến giải tích ngẫu nhiên. Phạm vi bài viết đề cập công thức Itô một chiều và công thức Itô tổng quát cùng với các ví dụ minh họa cho các công thức sẽ giúp cho việc tiếp cận quá trình Itô dễ dàng hơn, từ đó khai thác sâu hơn nữa ứng dụng vi tích phân Itô.

2. Nội dung và phương pháp nghiên cứu

2.1. Quá trình Itô

Xét trên không gian xác suất được lọc $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geq 0}, P)$, ta xác định một quá trình Wiener m-chiều $W_t = (W_t^1, W_t^2, ..., W_t^m)^t$ $(W_t^i, i = 1, 2, ..., m$ là các quá trình Wiener độc lập nhau) [1].

Các quá trình F_s^i, G_s^{ij} là các quá trình F_t đo được dần và thỏa điều kiện:

$$\int_0^t \left|F_s^i\right| ds < \infty; \qquad \int_0^t \left(G_s^{ij}\right)^2 ds < \infty$$

$$h.c.c \qquad \forall t < \infty; \forall i, j \tag{1}$$

(h.c.c: Hầu chắc chắn)

Nếu các quá trình $X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n$ là F_t- thích nghi và thỏa hệ thức:

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t F_s^i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t G_s^{ij} dW_s^j \tag{2}$$

Khi đó ta nói $X_t = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n)'$ là quá trình Itô n – chiều.

Ta có thể viết quá trình Itô ở dạng ma trận là:

$$X_t = X_0 + \int_0^t F_s ds + \int_0^t G_s dW_s \tag{3}$$

Hoặc viết dưới dạng vi phân Itô là:

$$dX_t = F_t dt + G_t dW_t \tag{4}$$

Với

[1]Trường Cao đẳng Cộng đồng Đồng Tháp
Email: nttam@dtcc.edu.vn

$$F_s = \begin{pmatrix} F_s^1 \\ \vdots \\ F_s^n \end{pmatrix}; \quad G_s = \left(G_s^{ik}\right)_{n\times m}; \quad dW_s = \begin{pmatrix} dW_s^1 \\ \vdots \\ dW_s^m \end{pmatrix}$$

2.2. Công thức Itô trường hợp một chiều và các ví dụ minh họa

2.2.1. Công thức Itô trường hợp một chiều

Cho X_t là một quá trình Itô có vi phân ngẫu nhiên Itô dạng:

$$dX_t = \alpha(t,\omega)dt + \beta(t,\omega)dW_t$$

Giả sử $\varphi(t,x): R^2 \to R$ là hàm một lần khả vi liên tục theo biến thứ nhất t, hai lần khả vi liên tục theo biến thứ hai x. Khi đó quá trình ngẫu nhiên $K_t = \varphi(t, X_t)$ có vi phân Itô tính theo công thức sau:

$$dK_t = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t, X_t).\beta^2(t,\omega)dt \tag{5}$$

Hay viết theo cách khác là:

$$dK_t = [\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, X_t) + \alpha(t,\omega)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t, X_t)\beta^2(t,\omega)]dt + \beta(t,\omega)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, X_t)dW_t \tag{6}$$

Công thức Itô cho trường hợp này còn có thể viết ở dạng tích phân như sau [2]:

$$K_t = K_{t_0} + \int_{t_0}^{t}\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s, X_s)ds + \int_{t_0}^{t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s, X_s)\beta(t,\omega)ds$$

2.2.2. Ví dụ minh họa

a) Xét quá trình ngẫu nhiên $K_t = tW_t^n$. Áp dụng công thức Itô tìm dK_t?

$$K_t = tW_t^n \Rightarrow \alpha(t,\omega) = 0, \beta(t,\omega) = 1$$

Ta xét $\varphi(t,x) = tx^n$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) = x^n; \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) = ntx^{n-1};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x) = n(n-1)tx^{n-2}$$

Áp dụng công thức Itô (5) ta được:

$$dK_t = d(tW_t^n) = W_t^n dt + ntW_t^{n-1}dW_t + \frac{1}{2}n(n-1)tW_t^{n-2}dt$$

b) Xét quá trình ngẫu nhiên

$$Y_t = \frac{W_t}{1+t}$$

Tìm dY_t?

Ta xét $\varphi(t,x) = \dfrac{x}{1+t}$

Ta có:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) = -\frac{x}{(1+t)^2}; \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{1+t};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

Áp dụng công thức Itô (5) ta được:

$$d\left(Y_t\right) = d\left(\frac{W_t}{1+t}\right) = -\frac{W_t}{\left(1+t\right)^2}dt + \frac{1}{1+t}dW_t$$
$$= -\frac{Y_t}{1+t}dt + \frac{1}{1+t}dW_t$$

2.3. Công thức Itô tổng quát và các ví dụ minh họa

2.3.1. Công thức Itô tổng quát

Cho X_t là một quá trình Itô thỏa phương trình vi phân ngẫu nhiên (4) $dX_t = F_t dt + G_t dW_t . u:[0,\infty)\times R^n \to R$ là một hàm thỏa $u(t,x)$ hai lần khả vi liên tục theo x, một lần khả vi liên tục theo t, và xác định hàm $u(t,X_t)$. Khi đó $u(t,X_t)$ là một quá trình Itô thỏa:

$$\begin{aligned} u(t,X_t) &= u(t_0,X_{t_0}) \\ &+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} u_i(s,X_s)G_s^{ik}dW_s^k \\ &+\int_{t_0}^{t}\{u'(s,X_s)+\sum_{i=1}^{n} u_i(s,X_s)F_s^i \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}u_{ij}(s,X_s)G_s^{ik}G_s^{jk}\}ds \end{aligned} \tag{7}$$

Trong đó $u'(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ và $u_i(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x^i}(t,x)$.

Để giảm bớt độ phức tạp của tính toán, ta viết lại công thức Itô dạng vi phân Itô như sau [2], [3]:

$$\begin{aligned} du(t,X_t) &= u'(t,X_t)dt + \partial(t,X_t)^* dX_t \\ &+\frac{1}{2}Tr\left[\partial^2 u(t,X_t)dX_t(dX_t)^*\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Trong đó: Tr(A): Vết của ma trận A; $(dX_t)^*$ ma trận chuyển vị của dX_t.

Với:

$\partial u(t,x)$ là vectơ cột với các phần tử $u_i(t,x)$.

$\partial^2 u(t,x)$ là ma trận với các phần tử $u_{ij}(t,x)$.

$dX_t^i dX_t^j$ được tính như sau:

$$dt.dt = dW_t^i.dt = dt.dW_t^i = 0,$$
$$dW_t^i.dW_t^j = \delta_{ij}dt$$

($\delta_{ij} = 1$ khi $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ khi $i \neq j$)

2.3.2. Ví dụ minh họa

a) Cho X_t, Y_t là hai quá trình Itô một chiều. Xem $u(t,z) = u(t,x,y) = xy$. Khi đó u là hàm hai lần khả vi liên tục theo x, y. Công thức Itô được viết là:

$$X_tY_t = X_{t_0}Y_{t_0} + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\left(X_sG_s^{2k} + Y_sG_s^{1k}\right)dW_s^k$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left(X_sF_s^2 + Y_sF_s^1 + \sum_{k=1}^{m}G_s^{1k}G_s^{2k}\right)ds$$

Viết dạng công thức vi phân của tích là: $d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + dX_tdY_t$

Đặc biệt khi X_t, Y_t là các quá trình có vi phân ngẫu nhiên tương ứng là:

$$dX_t = \alpha_1(t, X_t)dt + \beta_1(t, X_t)dW_t;$$
$$dY_t = \alpha_2(t, X_t)dt + \beta_2(t, X_t)dW_t$$

Khi đó ta sẽ có:

$$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + \beta_1\beta_2dt$$

Chứng minh:

Xét $u(t,z) = u(t,x,y) = xy$ với $z = (x, y)$

$$u'(t,z) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,z) = 0 \qquad u_1(t,z) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,z) = y$$

$$u_2(t,z) = \frac{\partial u}{\partial y}(t,z) = x \qquad \partial u(t,Z_t)^* = \begin{pmatrix} Y_t & X_t \end{pmatrix}$$

$$\partial u(t,Z_t)^* dZ_t = \begin{pmatrix} Y_t & X_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dX_t \\ dY_t \end{pmatrix} = Y_tdX_t + X_tdY_t$$

$$\partial^2 u(t,Z_t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 u(t,Z_t)dZ_t(dZ_t)^*$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dX_t \\ dY_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dX_t & dY_t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} dY_t \\ dX_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dX_t & dY_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX_tdY_t & (dY_t)^2 \\ (dX_t)^2 & dX_tdY_t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Tr\left(\partial^2 u(t,Z_t)dZ_t\left(dZ_t\right)^*\right) = 2dX_tdY_t$$

Thế tất cả vào công thức (8) ta được:

$$d(X_tY_t) = u'(t,z_t)dt + \partial u(t,z_t)dZ_t$$
$$+\frac{1}{2}Tr(\partial^2 u(t,Z_t)dZ_t(dZ_t)^*)$$
$$= Y_tdX_t + X_tdY_t + dX_tdY_t$$

Với

$$dX_t = \alpha_1(t, X_t)dt + \beta_1(t, X_t)dW_t;$$
$$dY_t = \alpha_2(t, X_t)dt + \beta_2(t, X_t)dW_t$$

$$\Rightarrow dX_tdY_t = \alpha_1\alpha_2\left(dt\right)^2 + \alpha_1\beta_2dtdW_t$$
$$+\beta_1\alpha_2dW_tdt + \beta_1\beta_2dW_tdW_t = \beta_1\beta_2dt$$

Vậy $d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + \beta_1\beta_2dt$

b) Cho X_t, Y_t là hai quá trình Itô một chiều và $Y_t \neq 0$, xem $u(t,z) = u(t,x,y) = \dfrac{x}{y}; y \neq 0$. Khi đó u là hàm hai lần khả vi liên tục theo x, y. Công thức Itô được viết là:

$$\frac{X_t}{Y_t} = \frac{X_{t_0}}{Y_{t_0}} + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{Y_s}G_s^{1k} - \frac{X_s}{Y_s^2}G_s^{2k}\right)dW_s^k$$
$$+\int_{t_0}^{t}\{\frac{1}{Y_s}F_s^1 - \frac{X_s}{Y_s^2}F_s^2$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{X_s}{Y_s^3}G_s^{2k}G_s^{2k} - \frac{1}{Y_s^2}G_s^{1k}G_s^{2k}\right)\}ds$$

Viết lại công thức vi phân của thương là:

$$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)=\frac{1}{Y_t}dX_t-\frac{X_t}{Y_t^2}dY_t-\frac{1}{Y_t^2}dX_tdY_t$$
$$+\frac{X_t}{Y_t^3}\left(dY_t\right)^2$$

Đặc biệt khi X_t, Y_t là các quá trình có vi phân ngẫu nhiên tương ứng là:

$$dX_t=\alpha_1(t,X_t)dt+\beta_1(t,X_t)dW_t;$$
$$dY_t=\alpha_2(t,X_t)dt+\beta_2(t,X_t)dW_t$$

Khi đó ta sẽ có:

$$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)=\frac{Y_tdX_t-X_tdY_t}{Y_t^2}+\frac{\beta_2X_t-\beta_1Y_t}{Y_t^3}\beta_2dt;$$
$(Y_t\neq 0)$

Chứng minh:

Xét $u(t,x)=u(t,x,y)=\dfrac{x}{y},\qquad y\neq 0,$

với $z=(x,y)$.

$$u'(t,z)=\frac{\partial u}{\partial t}(t,z)=0$$

$$u_1(t,z)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,z)=\frac{1}{y}$$

$$u_2(t,z)=\frac{\partial u}{\partial y}(t,z)=-\frac{x}{y^2}$$

$$\partial u(t,z)^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\partial u(t,Z_t)^*dZ_t$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{Y_t} & -\frac{X_t}{Y_t^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dX_t\\ dY_t\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{Y_t}dX_t-\frac{X_t}{Y_t^2}dY_t$$

$$\partial^2u(t,Z_t)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{Y_t^2}\\ -\frac{1}{Y_t^2} & \frac{2X_t}{Y_t^3}\end{pmatrix}$$

$$\partial^2u(t,Z_t)dZ_t(dZ_t)^*$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{Y_t^2}\\ -\frac{1}{Y_t^2} & \frac{2X_t}{Y_t^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dX_t\\ dY_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dX_t & dY_t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{Y_t^2}dY_t\\ -\frac{1}{Y_t^2}dX_t+\frac{2X_t}{Y_t^3}dY_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dX_t & dY_t\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Tr\left(\partial^2u(t,Z_t)dZ_t(dZ_t)^*\right)$$
$$=-\frac{2}{Y_t^2}dX_tdY_t+\frac{2X_t}{Y_t^3}\left(dY_t\right)^2$$

Thế tất cả vào công thức Itô (8) ta được:

$$d\left(u(t,Z_t)\right)=d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)$$

$$=u'(t,Z_t)+\partial(t,Z_t)^*dZ_t$$

$$+\frac{1}{2}Tr\left(\partial^2u(t,Z_t)dZ_t\left(dZ_t\right)^*\right)$$

$$=\frac{1}{Y_t}dX_t-\frac{X_t}{Y_t^2}dY_t-\frac{1}{Y_t^2}dX_tdY_t+\frac{X_t}{Y_t^3}\left(dY_t\right)^2$$

Với:

$$dX_t=\alpha_1(t,X_t)dt+\beta_1(t,X_t)dW_t;$$
$$dY_t=\alpha_2(t,X_t)dt+\beta_2(t,X_t)dW_t$$
$$\Rightarrow dX_tdY_t=\alpha_1\alpha_2\left(dt\right)^2+\alpha_1\beta_2dtdW_t$$
$$+\beta_1\alpha_2dW_tdt+\beta_1\beta_2dW_tdW_t=\beta_1\beta_2dt$$

Và

$$\left(dY_t\right)^2 = \alpha_2^2\left(dt\right)^2 + 2\alpha_2\beta_2 dt dW_t + \beta_2^2\left(dW_t\right)^2 = \beta_2^2 dt$$

Vậy:

$$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{1}{Y_t}dX_t - \frac{X_t}{Y_t^2}dY_t - \frac{1}{Y_t^2}\beta_1\beta_2 dt + \frac{X_t}{Y_t^3}\beta_2^2 dt$$

$$= \frac{Y_t dX_t - X_t dY_t}{Y_t^2} + \frac{\beta_2 X_t - \beta_1 Y_t}{Y_t^3}\beta_2 dt$$

Giải tích Itô trong đó đặc biệt là công thức Itô có ý nghĩa và ứng dụng cao trong lĩnh vực kinh tế, đặc biệt là lĩnh vực tài chính, theo dõi, phân tích sự thay đổi của giá cả, thị trường chứng khoán. Giá cổ phiếu và các tài sản chính giao dịch khác có thể mô hình hóa bằng các quá trình ngẫu nhiên. Công thức Itô, tích phân ngẫu nhiên Itô đại diện cho lợi nhuận của chiến lược giao dịch thời gian liên tục. Qua phân tích ta sẽ nắm được quá trình H_t tại thời điểm t (quá trình tích phân), từ đó theo dõi thông tin và sự biến động của H_t để đưa ra các quyết định. Việc phân tích sâu hơn về các ứng dụng về giải tích Itô sẽ được nghiên cứu thêm ở các bài nghiên cứu sau.

3. Kết luận

Lý thuyết về quá trình ngẫu nhiên đóng vai trò rất quan trọng trong chương trình xác suất thống kê, vi tích phân Itô là khái niệm nền tảng để đi sâu nghiên cứu giải tích ngẫu nhiên. Nghiên cứu và phân tích kỹ về quá trình Itô, công thức Itô trường hợp một chiều và tổng quát sẽ tạo nền tảng cơ bản để tiến đến phân tích sâu hơn về khai triển Itô-Taylor, từ đó xây dựng các phương pháp số để giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên. Với việc phân tích chi tiết ví dụ tính theo công thức Itô, tác giả bài báo hy vọng sẽ bổ sung một phần nhỏ vào đề tài nghiên cứu toán ứng dụng, góp phần làm phong phú thêm nguồn tham khảo về công thức Itô, giúp cho việc tiếp cận giải tích ngẫu nhiên dễ dàng hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Dương Tôn Đảm (2010), *Quá trình ngẫu nhiên (Phần II: Các phép toán Malliavin)*, Nxb. Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Hồ Chí Minh

2. Nguyễn Thành Tâm (2010), “Các phép tính vi tích phân ngẫu nhiên đối với quá trình Itô”, Luận văn thạc sĩ, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Hồ Chí Minh

3. Bernt Oksendal (2005), *Stochastic Differential Equations – An introduction with Application,* Dover Publications, Inc, Mineola, New York

ITO FORMULA AND EXAMPLES OF CALCULATION

ABSTRACT

The paper analyzes and studies the one-dimensional case and the General Ito formula, with examples that correspond to each formula. Specific examples of the Ito formula will be useful for accessing random arithmetic, from there, we can go deeper into the study of random integrals.

Keywords: *Ito, differential, integral, random process*

(Received: 27/1/2021, Revised: 16/6/2022, Accepted for publication: 31/8/2022)